7.2 Razmena limita i integrala

U ovom odeljku razmatramo funkcije definisane preko nekog realnog parametra u integralu. Naredna propozicija utvrđuje dovoljne uslove, pod kojima se može razmeniti redosled limita ili diferencijala i integrala po meri, odnosno Rimanovog integrala i integrala po meri.

Propozicija 7.1. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa $\sigma-$algebrom $\mathcal{M}$ i $\sigma-$konačnom kompletnom merom μ. Neka je $f : X \times [a, b] \to \mathbf{C}$ ($[a, b]$ je interval u $\mathbf{R}$) preslikavanje za koje važi da je funkcija f merljiva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{[a,b]}$ i integrabilna za svako $t \in [a, b]$.

Definišimo

$$F(t) = \int\limits_X f(x, t) d\mu(x),\ t \in [a, b].$$

a) Pretpostavimo da postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da važi

$$|f(x, t)| \leq g(x),\ (x, t) \in X \times [a, b]. \tag{7.7}$$

Ako je $\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$, za svako $x \in X$, $t_0 \in [a, b]$, tada važi

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0).$$

b) Pretpostavimo da $\frac{\partial f}{\partial t}$ postoji za svako $t \in [a, b]$, svako $x \in X$ i da postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da je

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x),\ t \in [a, b],\ x \in X. \tag{7.8}$$

Tada je F diferencijabilna funkcija na $[a, b]$ i važi

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int\limits_X \frac{\partial}{\partial t} f(\cdot, t) d\mu.$$

c) Pod istim pretpostavkama kao u a), sledi da je

$$\int_{[a,b]} F(t) dm(t) = \int_X \left(\int_{[a,b]} f(x, t) dm(t) \right) d\mu(x).$$

Primedba. U tvrđenju a) uslovi se se mogu zameniti sa:

$$|f(x, t)| \leq g(x),\ t \in [a, b],\ x \in X \ \ \text{(s.s.)}\ ,$$

$$\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0),\ x \in X \ \ \text{(s.s.)}\ ,$$